**Задания для контрольных работ**

Задание 1

Найти пределы функций в точке , используя свойства пределов, замечательные пределы и сравнение бесконечно малых.

Вариант 1

1) : а) , б) , в) , г) ;

2) ; 3) ;

4) .

Вариант 2

1) : а) , б) , в) , г) ;

2) ; 3) ;

4) .

Вариант 3

1) : а) , б) , в) , г) ;

2) ; 3) ;

4) .

Вариант 4

1) : а) , б) , в) , г) ;

2) ; 3) ;

4) .

Вариант 5

1) : а)  б) , в) , г) ;

2) ; 3) ;

4) .

Вариант 6

1) : а) , б) , в) , г) ;

2) ; 3) ;

4) .

Вариант 7

1) : а) , б) , в) , г) ;

2) ; 3) ;

4) .

Вариант 8

1) : а) , б) , в) , г) ;

2) ; 3) ;

4) .

Вариант 9

1) : а) , б) , в) , г) ;

2) ; 3) ;

4) .

Вариант 10

1) : а) , б) , в) , г) ;

2) ; 3) ;

4) .

Задание 2

Исследовать на непрерывность функции  и построить эскизы их графиков.

Вариант 1

а)  б) .

Вариант 2

а)  б) .

Вариант 3

а)  б) .

Вариант 4

а)  б) .

Вариант 5

а)  б) .

Вариант 6

а)  б) .

Вариант 7

а)  б) .

Вариант 8

а)  б) .

Вариант 9

а)  б) .

Вариант 10

а)  б) .

Задание 3

Найти производные  следующих функций:

Вариант 1

1) ; 2) ;

3) ; 4) ;

5) .

Вариант 2

1) ; 2) ; 3) ;

4) ; 5) .

Вариант 3

1) ; 2) ; 3) ;

4) ; 5) .

Вариант 4

1) ; 2) ; 3) ;

4) ; 5) .

Вариант 5

1) ; 2) ; 3) ;

4) ; 5) .

Вариант 6

1) ; 2) ; 3) ;

4) ; 5) .

Вариант 7

1) ; 2) ;

3) ; 4) ;

5) .

Вариант 8

1) ; 2) ;

3) ; 4) ;

5) .

Вариант 9

1) ; 2) ; 3) ;

4) ; 5) .

Вариант 10

1) ; 2) ;

3) ; 4) ;

5) .

Задание 4

Пользуясь правилом Лопиталя, найти предел.

Вариант 1 . Вариант 2 .

Вариант 3 . Вариант 4 .

Вариант 5 . Вариант 6 .

Вариант 7 . Вариант 8 .

Вариант 9 . Вариант 10 .

Задание 5

Средствами дифференциального исчисления исследовать функцию и построить её график. Значения коэффициентов *В* и *С* приведены в таблице, *n*-номер варианта.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| *В* | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | –2 |
| *С* | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 18 | 3 |

Задание 6

Найти все частные производные второго порядка функции  и значение указанной частной производной в указанной точке.

Вариант 1 , .

Вариант 2 , .

Вариант 3 , .

Вариант 4 , .

Вариант 5 , .

Вариант 6 , .

Вариант 7 , .

Вариант 8 , .

Вариант 9 , .

Вариант 10 , .

Задание 7

Даны: скалярное поле , точки  и .

Найти:

а) градиент поля  в точке ;

б) производную функции  в точке  по направлению от точки  к точке .

Вариант 1 , , .

Вариант 2 , , .

Вариант 3 , , .

Вариант 4 , , .

Вариант 5 , , .

Вариант 6 , , .

Вариант 7 , , .

Вариант 8 , , .

Вариант 9 , , .

Вариант 10 , , .

Задание 8

Найти точки экстремума функции  и определить их характер.

Вариант 1 .

Вариант 2 .

Вариант 3 .

Вариант 4 .

Вариант 5 .

Вариант 6 .

Вариант 7 .

Вариант 8 .

Вариант 9 .

Вариант 10 .

Задание 9

Найти  и в замкнутой области *D*, заданной системой неравенств. Сделать рисунок области *D*.

Вариант 1 .

Вариант 2 .

Вариант 3 .

Вариант 4 .

Вариант 5 .

Вариант 6 .

Вариант 7 .

Вариант 8 .

Вариант 9 .

Вариант 10 .

Задание 10

Найти неопределенные интегралы.

Вариант 1

1) ; 2) ;

3) ; 4) ; 5) .

Вариант 2

1) ; 2) ;

3) ; 4) ; 5) .

Вариант 3

1) ; 2) ;

3) ; 4) ; 5) .

Вариант 4

1) ; 2) ;

3) ; 4) ; 5) .

Вариант 5

1) ; 2) ;

3) ; 4) ; 5) .

Вариант 6

1) ; 2) ;

3) ; 4) ; 5) .

Вариант 7

1) ; 2) ;

3) ; 4) ; 5) .

Вариант 8

1) ; 2) ;

3) ; 4) ; 5) .

Вариант 9

1) ; 2) ;

3) ; 4) ; 5) .

Вариант 10

1) ; 2) ;

3) ; 4) ; 5) .

Задание 11

Вычислить определенный интеграл.

Вариант 1 . Вариант 2 .

Вариант 3 . Вариант 4 .

Вариант 5 . Вариант 6 .

Вариант 7 . Вариант 8 .

Вариант 9 . Вариант 10 .

Задание 12

Исследовать на сходимость числовые ряды .

Вариант 1

1) ; 2) ; 3) ;

4) .

Вариант 2

1) ; 2) ; 3) ;

4) .

Вариант 3

1) ; 2) ; 3) ;

4) .

Вариант 4

1) ; 2) ; 3) ;

4) .

Вариант 5

1) ; 2) ; 3) ;

4) .

Вариант 6

1) ; 2) ; 3) ;

4) .

Вариант 7

1) ; 2) ; 3) ;

4) .

Вариант 8

1) ; 2) ; 3) ;

4) .

Вариант 9

1) ; 2) ; 3) ;

4) .

Вариант 10

1) ; 2) ; 3) ;

4) .

Задание 13

Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость.

Вариант 1 . Вариант 2 .

Вариант 3 . Вариант 4 .

Вариант 5 . Вариант 6 .

Вариант 7  Вариант 8 .

Вариант 9 . Вариант 10 .

Задание 14

Найти область сходимости степенного ряда.

Вариант 1 . Вариант 2 .

Вариант 3 . Вариант 4 .

Вариант 5 . Вариант 6 .

Вариант 7 . Вариант 8 .

Вариант 9 . Вариант 10 .

Задание 15

Решить дифференциальные уравнения.

Вариант 1

а)  б) ; в) .

Вариант 2

а) ; б) ; в) .

Вариант 3

а) ; б) ; в) .

Вариант 4

а) ; б) ; в) .

Вариант 5

а) ; б) ; в) .

Вариант 6

а) ; б) ; в) .

Вариант 7

а) ; б) ; в) .

Вариант 8

а) ; б) ; в) .

Вариант 9

а) ; б) ; в) .

Вариант 10

а) ; б) ; в) .

Задание 16

Решить задачу Коши для дифференциальных уравнений.

Вариант 1 а) , ;

б) , .

Вариант 2 а) , ;

б) , .

Вариант 3 а) , ;

б) , .

Вариант 4 а) , ;

б) , .

Вариант 5 а) , ;

б) , .

Вариант 6 а) , ;

б) , .

Вариант 7 а) , ;

б) , .

Вариант 8 а) , ;

б) , .

Вариант 9 а) , ;

б) , .

Вариант 10 а) , ;

б) , .

**Решение нулевого варианта контрольных работ**

Задание 1

Найти пределы функций, используя свойства пределов, замечательные пределы и сравнение бесконечно малых функций.

1)  при а) , б) , в) , г) ;

2) ; 3) ;

4) .

Решение

1) Если подстановка предельного значения переменной в функцию не приводит к неопределенности, то ответ очевиден.

а),

б) .

Если подстановка предельного значения  переменной  в функцию приводит к неопределенности типа , то и в числителе, и в знаменателе дроби есть одинаковые множители . Разложив числитель и знаменатель дроби на множители и сократив на множитель , можем избавиться от неопределенности.

в) .

Если при  получается неопределенность типа , то деление числителя и знаменателя дроби на  в старшей степени и последующее использование свойств пределов приводит к ответу.

г).

2) Если подстановка предельного значения  переменной  в функцию приводит к неопределенности типа , то и в числителе и в знаменателе дроби есть одинаковые множители . Для нахождения этого множителя достаточно перевести иррациональность из числителя в знаменатель или наоборот.



.

3) Если в выражении, стоящем под знаком предела, есть тригонометрические или обратные тригонометрические функции и имеется неопределенность типа , то она может быть раскрыта с помощью первого замечательного предела .

=

==

=.

4) При вычислении пределов можно заменять функцию на эквивалентную. Так, например, при  , , ,

, , , , .

Для решаемой задачи

,

, , .

Следовательно =.

Задание 2

Исследовать на непрерывность функции

а)  б)  и построить эскизы их графиков.

Решение

а) Функции , ,  - элементарные, поэтому они непрерывны в области их определения, то есть при любых значениях аргумента . Следовательно, заданная неэлементарная функция  может иметь точки разрыва только в точках «стыковки» функций , , , то есть при  и .

Проверим выполнение условий непрерывности функции  в этих точках.

1) .

;

;

.

Так как , то функция непрерывна в точке .

2) .

;

.

Так как , то точка  является точкой разрыва функции .

Так как односторонние пределы конечны, но не равны, то точка  является неустранимой точкой разрыва первого рода.

Построим эскиз графика функции .



б) Функция  является элементарной, поэтому она непрерывна в области её определения. В область определения не входят точки , , , следовательно, они являются точками разрыва данной функции.

Определим тип точек разрыва.

1) .

;

.

Так как , то точка  является точкой

разрыва второго рода функции .

2) .

;

.

Односторонние пределы функции в точке  равны, но функция при  не определена, следовательно,  является устранимой точкой разрыва первого рода.

3) .

Так как заданная функция является четной функцией, то, очевидно, что

,  и  является точкой разрыва второго рода функции .

Для построения эскиза графика функции исследуем поведение функции при

 и . Так как функция четная, то

.

Построим эскиз графика функции .



Задание 3

Найти производные  заданных функций:

1) ; ;

4) ; 5) .

Решение

Используя таблицу производных, свойства производной, правило дифференцирования сложной функции, формулу нахождения производной функции, заданной параметрически, алгоритм нахождения производной функции, заданной неявно, найдем производные заданных функций.

1) 



.

2) 

.



.

4) 

.

5) Продифференцируем обе части равенства  по , считая  промежуточным аргументом: ; ; .

Из последнего равенства находим .

Задание 4

Пользуясь правилом Лопиталя, найти предел .

Решение

.

Для раскрытия неопределенности  воспользуемся тождеством

, .

Так как показательная функция непрерывна, то





.

Таким образом, .

Задание 5

Исследовать функцию  и построить её график.

Решение

Заданная функция является непериодической функцией общего вида. Её график проходит через начало координат, так как .

Областью определения заданной функции являются все значения переменной , кроме  и , при которых знаменатель дроби обращается в ноль.

Следовательно, точки  и  являются точками разрыва функции.

Так как , , то точка  является точкой разрыва второго рода.

Так как ,, то точка  является точкой разрыва второго рода.

Прямые  и  являются вертикальными асимптотами графика функции.

Уравнения наклонных асимптот , где , .

При  ,

.

Таким образом, при  и  график функции имеет одну асимптоту .

Найдем интервалы возрастания и убывания функции и точки экстремумов.

.

Первая производная функции  при  и , следовательно, при  и  функция возрастает.

При  , следовательно, при , функция убывает.

 не существует при , .



При переходе через точку   меняет знак с «+» на «-», следовательно, точка  является точкой максимума функции, причем .

При переходе через точку   меняет знак с «-» на «+», следовательно, точка  является точкой минимума функции, причем ).

Найдем интервалы выпуклости, вогнутости графика функции и точки перегиба, используя вторую производную заданной функции, которая равна .

Вторая производная  при , следовательно, при  график функции вогнутый.

При  , следовательно, при  график функции выпуклый.



При переходе через точки , ,   меняет знак. При ,  функция не определена, следовательно, график функции имеет одну точку перегиба .

Построим график функции.



Задание 6

Найти все частные производные второго порядка функции  и .

Решение

Производные второго порядка – это производные от производных первого порядка, поэтому сначала найдем производные первого порядка

****, , .

Частные производные второго порядка - это

,

,

,

,

,

,

,

,



Значение  будет равно

.

Задание 7

Даны скалярное поле  точки , .

Найти:

а) градиент поля  в точке ;

б) производную функции  в точке  по направлению от точки  к точке .

Решение

а) Градиент поля  в точке  вычисляется по формуле .

Найдем частные производные данной функции и их значения в точке :

,

,

.

Следовательно, .

б) Производная скалярного поля  по направлению вектора  в точке  вычисляется по формуле , где , , .

Для решаемой задачи , , ,

, , , .

Следовательно, .

Задание 8

Найти точки экстремума функции  и определить их характер.

Решение

Найдем стационарные точки заданной функции, то есть точки, в которых выполняется необходимое условие существования экстремума. Для функции трех переменных  стационарные точки (координаты точек) находятся из системы 

Для заданной функции , ,  и система примет вид 

Решениями системы являются  и 

Получили две стационарные точки  и .

Для проверки достаточных условий экстремума в стационарной точке необходимо определить знаки определителей , и  в этой точке.

Найдем , , , , , .

Для точки  , , . Так как , , , то в точке  функция имеет максимум, при этом .

Для точки  , , . Так как , , , то в точке  функция не имеет экстремума.

Задание 9

Найти  и  для функции  в замкнутой области *D*, заданной системой неравенств . Сделать рисунок области *D*.

Решение

Своего наибольшего и наименьшего значений в заданной области функция может достигать либо в экстремальной точке, принадлежащей заданной области, либо на границе области.

Изобразим заданную область



Найдём стационарные точки функции из системы 

Для заданной функции система примет вид  или 

Решая систему, находим координаты стационарной точки . Эта точка лежит на границе области .

Исследуем функцию на границе области .

На *ОА*  и заданная функция становится функцией одного аргумента :  .

Найдём стационарные точки функции : ;  при . Точка  принадлежит *ОА*.

На *ОВ*  и заданная функция становится функцией одного аргумента :  .

Найдём стационарные точки функции : ;  при . Точка  принадлежит *ОВ*.

На *АВ*  и заданная функция становится функцией одного аргумента :

 .

;  при . При  . Эта стационарная точка  совпадает с точкой .

Кроме стационарных точек *М*, *N*, *P* необходимо рассмотреть и точки «стыковки» границ области, так как эти точки являются границами областей для функций ,  и .

Вычислим значения функции в точках *А*, *В*, *M*, *N*, *P*:

, , ,

, ,

.

Сравнивая найденные значения функции, делаем вывод, что в заданной области наименьшее значение функции , наибольшее значение .

Задание 10

Найти неопределенные интегралы.

1) ; 2) ;

3) ; 4) ; 5) .

Решение

1) Для вычисления данного интеграла воспользуемся свойствами неопределенных интегралов и табличными интегралами.

*=*





.

2) Для вычисления данного интеграла воспользуемся приемом интегрирования – подведение под знак дифференциала.

.

3) Для вычисления данного интеграла воспользуемся заменой переменной.



.

4) Для вычисления данного интеграла воспользуемся формулой интегрирования по частям.



.

5) Так как подынтегральная функция  – правильная, но не простейшая дробь, то найдём представление этой дроби в виде суммы простейших дробей:

,

.

Из равенства дробей и знаменателей этих дробей следует равенство числителей

.

Неизвестные коэффициенты можно найти из системы уравнений, полученной после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  многочленов, стоящих слева и справа от знака равенства:



Таким образом,  и





.

Задание 11

Вычислить определенный интеграл .

Решение

Для вычисления интеграла применим универсальную тригонометрическую подстановку.





.

Задание 12

Исследовать на сходимость числовые ряды .

1) .

Решение

1)  Сравним данный знакоположительный ряд с гармоническим рядом  который расходится. Воспользуемся предельным признаком сравнения:



Оба ряда ведут себя одинаково, следовательно, исследуемый ряд расходится.

2) . Воспользуемся признаком Даламбера. Для исследуемого ряда , .

Так как , то исследуемый ряд сходится.

3)  Воспользуемся радикальным признаком Коши:

.

Исследуемый ряд сходится.

4) . Воспользуемся интегральным признаком сходимости.

Так как интеграл  расходится, то расходится и ряд .

Задание 13

Исследовать ряд  на абсолютную и условную сходимость.

Решение

Данный ряд является знакочередующимся.

Воспользуемся для исследования его сходимости теоремой Лейбница: если в знакочередующемся ряде ,   и , то ряд сходится.

Проверим выполнение условий теоремы для заданного ряда .

По условию , .

Очевидно, что  и .

Следовательно, данный знакочередующийся ряд сходится.

Составим ряд из абсолютных величин членов данного знакочередующегося ряда: . Этот ряд является частным случаем обобщенного гармонического ряда . Так как для исследуемого ряда , то ряд  расходится.

Исследуемый знакочередующийся ряд сходится, ряд составленный из абсолютных величин членов ряда расходится, следовательно, исследуемый знакочередующийся ряд сходится условно (неабсолютно).

Задание 14

Найти область сходимости степенного ряда .

Решение

Заданный ряд является степенным рядом.

Согласно признаку Даламбера, для абсолютной сходимости ряда  достаточно, чтобы .

Для решаемой задачи , .

Так как , то ряд будет абсолютно сходиться при значениях , удовлетворяющих неравенству .

Решением этого неравенства является интервал , следовательно, при  исследуемый степенной ряд будет абсолютно сходиться.

Исследуем поведение ряда на концах интервала, то есть при  и .

При  получаем числовой ряд . Это знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница: , . Поэтому ряд  сходится, и граница интервала  принадлежит области сходимости. В область абсолютной сходимости ряда эта граница не входит, так как ряд  расходится.

При  получаем числовой ряд . Это гармонический ряд, и он расходится. Следовательно, граница интервала  не принадлежит области сходимости степенного ряда.

Итак, областью сходимости степенного ряда  является полуинтервал , а областью абсолютной сходимости степенного ряда  является интервал .

Задание 15

Решить дифференциальные уравнения:

а) ; б) ; в) .

Решение

а) Уравнение  - это уравнение с разделяющимися переменными, то есть уравнение вида .

Разделим переменные: , , .

Интегрируя, получим

, , , , .

Таким образом, общим решением уравнения является функция , где  - произвольная постоянная.

б) Если в уравнении  функция  является однородной функцией нулевого измерения , то это уравнение называется однородным.

Однородное уравнение с помощью подстановки , ,  сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Проверим функцию  на однородность:

.

Следовательно, заданное уравнение является однородным.

Делаем подстановку , , .

Уравнение  примет вид  или .

Разделим переменные и проинтегрируем.

, , , ,

, , ,

.

Возвращаясь к переменным  и  , получим общее решение заданного уравнения  или .

в) Уравнение  линейное относительно  и , то есть является уравнением вида , которое называется линейным.

Применим для его решения метод подстановки.

Будем искать решение уравнения  в виде . Тогда  и уравнение принимает вид или .

Выберем  из условия .

Уравнение  является уравнением с разделяющимися переменными. Найдем его решение.

, , , , .

Для определенной таким образом функции , получим уравнение для нахождения функции :  или . Это уравнение с разделяющимися переменными. Его решение .

Запишем общее решение заданного уравнения .

Задание 16

Решить задачу Коши для дифференциальных уравнений.

а) , , ;

б) , .

Решение

Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения имеет вид , где

 – общее решение соответствующего однородного уравнения,

 – любое частное решение неоднородного уравнения.

В тех случаях, когда правая часть неоднородного уравнения содержит степенные, показательные, тригонометрические функции  и их сумму и произведение, частное решение неоднородного уравнения может быть найдено методом неопределенных коэффициентов. Частное решение в этих случаях ищется в виде аналогичном виду правой части уравнения, однако, на вид частного решения влияет и левая часть уравнения (корни характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения).

а) , , .

Найдем . Для этого запишем соответствующее однородное уравнение , составим его характеристическое уравнение , найдем корни характеристического уравнения , , запишем .

Найдем . Так как правая часть уравнения имеет вид , а среди корней характеристического уравнения нет корней равных , то будем искать частное решение в виде .

Единственным условием для нахождения коэффициентов является заданное уравнение. Поэтому найдем ,  и подставим их значения в неоднородное уравнение.

Получим .

Приравнивая коэффициенты при  и  в левой и правой частях последнего уравнения, получим систему уравнений для нахождения коэффициентов  и  

Решением системы являются , . Следовательно, .

Так как , то общее решение данного неоднородного уравнения имеет вид .

Для нахождения частного решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям  найдем , значения ,  и составим систему для нахождения  и .

   

Таким образом, частное решение данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид  - это и есть решение задачи Коши.

б) , .

Найдем . , , , .

Найдем . Так как правая часть уравнения имеет вид , а среди корней характеристического уравнения есть корень равный , то будем искать частное решение в виде  или .

Найдем ,



 и подставим их значения в неоднородное уравнение.



или ,

.

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях , получим систему для нахождения коэффициентов  и .

 

Таким образом, .

Так как , то общее решение данного неоднородного уравнения имеет вид

.

Для нахождения частного решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям  найдем , значения ,  и составим систему для нахождения  и .

 

  

Таким образом, частное решение данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид  или  - это и есть решение задачи Коши.